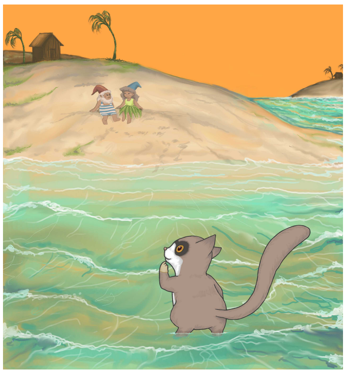
Zwergenrätsel

a) Gregor strandet auf einer von zwei benachbarten Inseln. Die Zwerge der einen Insel lügen stets, die der anderen sagen immer die Wahrheit. Gregor möchte mit nur einer Ja/Nein-Frage herausfinden, ob er sich auf der Wahrheits- oder der Lügeninsel befindet. Da sich die Zwerge gegenseitig besuchen, weiß Gregor noch nicht einmal, von welcher Insel der Zwerg, den er anspricht, eigentlich stammt. Was kann Gregor fragen?



b) Auf einem ein Meter langen Stab stehen einhundert Zwerge. Jeder bewegt sich mit genau einem Zentimeter pro Sekunde. Anfangs schaut jeder Zwerg in eine bestimmte Richtung. Sobald zwei Zwergen aufeinander stoßen, kehren sie um und laufen in die jeweils andere Richtung weiter. Wie lange dauert es höchstens, bis alle Zwerge das Ende des Stabs erreicht haben? (Dort fallen sie dann herunter und gehören nicht mehr zum Spiel.)

c) In einem einsamen Bergdorf gibt es 20 Zwerge. Eines Tages kommt der böse Riese vorbei und lässt die Zwerge in einer Reihe aufstellen, sodass jeder nur noch die Zwerge vor ihm sieht. Danach setzt der Riese jedem Zwerg entweder eine rote oder eine blaue Zipfelmütze auf den Kopf. Jeder Zwerg darf jetzt nacheinander eine Farbe sagen, wobei der Zwerg, der alle anderen 19 Zwerge vor ihm sieht, beginnen muss. Wenn ein Zwerg die Farbe seiner Zipfelmütze errät, kommt er frei, sagt er jedoch die falsche Farbe, muss er zwei Wochen für den Riesen auf dem Feld arbeiten. Mit welcher Strategie können die Zwerge möglichst viele (wieviele?) vor der Zwangsarbeit bewahren?

d) (*) 100 Zwerge haben Hüte aufgesetzt bekommen, die zwar alle die gleiche Farbe haben, aber mit einer natürlichen Zahl zwischen einschließlich 0 und 99 beschriftet sind. Die Zahlen können nach irgendeinem System geordnet sein oder auch völlig zufällig verteilt sein. Es kann auch sein, dass manche Zahlen mehrmals und andere gar nicht vorkommen. Jeder Zwerg sieht die Zahlen der anderen Zwerge, aber nicht seine eigene. Auf Zuruf müssen dann alle Zwerge gleichzeitig eine Zahl zwischen 0 und 99 nennen. Stimmt sie mit der eigenen Hutzahl überein, erhält der betreffende Zwerg ein Bonbon und sonst nicht. Mit welcher Strategie können die Zwerge erreichen, dass mindestens ein Zwerg sicher ein Bonbon erhält?

e) Drei Zwerge stehen mit je einem gelben oder roten Hut auf dem Kopf im Kreis. Sie können also die Hutfarben der anderen, nicht aber ihre eigene sehen. Man teilt ihnen mit, dass mindestens ein Hut rot ist. Der erste wird gefragt, ob er die Farbe seines Huts weiß; er verneint. Der zweite wird gefragt, ob er die Farbe seines Huts weiß; auch er verneint. Was ist die Farbe des Hutes des dritten Zwerges?

f) 100 Zwerge haben zwei verschiedene Farben von Mützen auf. Sie werden einzeln in einen Raum geführt, in dem sie sich in einer Reihe nach Farben sortiert aufstellen sollen. Wie machen sie das, wenn sie vorher eine Strategie ausmachen dürfen, währenddessen aber nicht reden dürfen und nur die Mützenfarben der anderen, aber nicht ihre eigenen, sehen?

g) 32 Zwerge sitzen in einem Kreis und haben rote und weiße Mützen auf. Dabei ist bekannt, dass nicht alle Mützen weiß sind. Jetzt sollen alle Zwerge gleichzeitig sagen, welche Farbe ihre Mütze hat. Können sie erreichen, dass mindestens einer der Zwerge die richtige Anzahl sagt? Können sie auch erreichen, dass mehr Zwerge die richtige Anzahl sagen?

h) (*) Die bösen Trolle haben unendlich viele Zwerge versammelt und wieder Hüte der Farben Schwarz und Weiß aufgesetzt. Alle Zwerge können sich gegenseitig sehen, nur ihre eigene Hutfarbe bleibt ihnen verborgen. Auf Kommando müssen dann alle Zwerge jeweils „schwarz“ oder „weiß“ rufen. Wer damit seine eigene Hutfarbe errät, bleibt am Leben; andernfalls wird er umgebracht. Vorab dürfen die Zwerge eine Strategie ausmachen, danach aber ist jede Kommunikation verboten. Finde eine Strategie, mit der auf jeden Fall *alle bis auf endlich viele* Zwerge überleben![1]

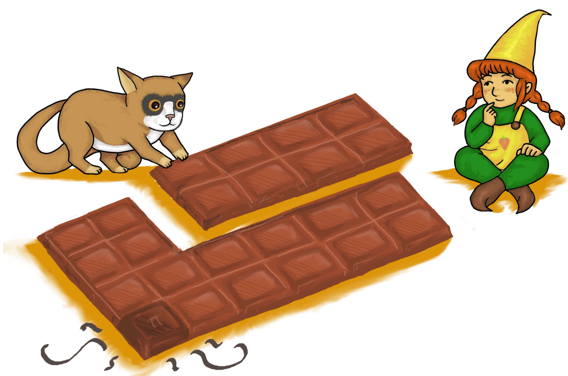
i) (*) Wie üblich wurden 100 Zwerge (mit den Nummern $1, 2, \ldots, 100$) gefangen genommen. Der Gefängnischef erklärt die Regeln:

   Die Zwerge werden, jeder für sich, in einen Raum geführt. In diesem Raum befinden sich 100 Schubladen (durchnummeriert von 1 bis 100). In jeder der Schubladen befindet sich ein Zettel. Auf den Zetteln steht jeweils eine Nummer von 1 bis 100. Jede Nummer steht auf genau einem Zettel, es kommt also nicht zu Wiederholungen.

   Jeder Zwerg darf nun fünfzig Schubladen seiner Wahl öffnen. Entdeckt er dabei den Zettel mit seiner eigenen Nummer, ist alles gut. Entdeckt er seinen eigene Nummer dagegen nicht, so sterben alle (!) Zwerge.

   Schafft jeder Zwerg, seine Nummer zu finden, so kommen alle Zwerge frei. Die Zwerge können sich vorab auf eine Strategie einigen, ab Beginn des „Spiels“ aber nicht mehr miteinander kommunizieren. Den Raum mit den Schubladen müssen sie genau so verlassen, wie sie ihn vorgefunden haben.

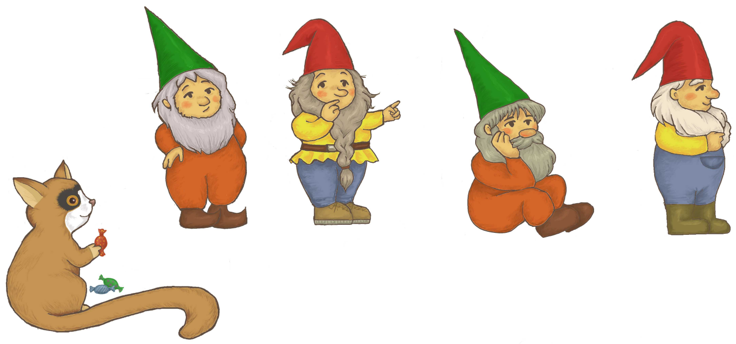
   Die Frage lautet: Gibt es eine Strategie, sodass die Zwerge nicht nur mit verschwindend geringer Wahrscheinlichkeit überleben und freigelassen werden?



[1] Achtung: Das ist eine stärkere Anforderung als nur zu verlangen, dass *unendlich viele* Zwerge überleben. Wenn zum Beispiel jeder zweite Zwerg überlebt, dann überleben zwar unendlich viele Zwerge, aber es sterben auch unendlich viele.

j) (*) Eine Zwergenschule hat 100 Schülerinnen und Schüler. Jeden Tag wird zufällig ein Zwerg zum Riesendirektor gerufen. Der Zwerg darf dann behaupten, dass zu diesem Zeitpunkt schon alle Zwerge mindestens einmal beim Riesen waren. Stimmt das, so dürfen alle zum Mathecamp mitfahren. Stimmt das nicht, darf niemand jemals wieder mitkommen. Zur Kommunikation dient eine einzige Lampe im Riesenbüro, die an oder aus sein kann. Die Zwerge dürfen den Status dieser Lampe bei ihren Riesenbesuchen ändern (müssen aber nicht). Der Riese rührt die Lampe nicht an. Die Zwerge sehen nicht, welche anderen Zwerge bereits beim Riesen waren. Ein und derselbe Zwerg kann möglicherweise mehrere Male zum Riesen gerufen werden. Finde eine Strategie, mit der die Zwerge schlussendlich wieder sicher zum Mathecamp dürfen![2]

k) Auf einer einsamen Insel leben 100 Zwerge, von denen jeder genau eine von zwei Augenfarben hat – entweder Grün oder Blau. Dies ist allen bekannt. Jedoch hat sich bei den Zwergen folgendes Ritual etabliert: Sobald ein Zwerg weiß, dass seine eigene Augenfarbe Blau ist, verlässt er die Insel in der darauffolgenden Nacht. Einmal am Tag treffen sich die Zwerge, sodass jeder Zwerg die Augenfarben aller anderen Zwerge sieht.[3] Da niemand die Insel verlassen will, schaut niemand in irgendwelche Spiegel oder ähnliches und man redet nicht über die Augenfarbe. Eines Tages kommt Gregor auf die Insel und erzählt den Zwergen, dass es einen Zwerg mit blauen Augen gibt. Nach wievielen Tagen sind alle Zwerge mit blauen Augen spätestens weg und warum?



l) (*) Ein Riese schreibt zwei beliebige, verschiedene ganze Zahlen auf zwei Zettel und legt sie nebeneinander verdeckt auf den Tisch. Ein Zwerg darf nun einen der beiden Zettel aufdecken und sich die Zahl anschauen. Er kann dann entweder bei seiner Wahl bleiben oder den anderen Zettel auswählen. Er gewinnt, wenn er den Zettel mit der größeren der beiden Zahlen ausgewählt hat. Gibt es eine Strategie, die dem Kandidat erlaubt, mit Wahrscheinlichkeit größer als 50% zu gewinnen?

m) (*) Auf einem 8×8-Schachbrett leben anfangs Zwerge auf einigen Feldern. In jedem Zug kommen neue Zwerge auf denjenigen Feldern hinzu, wo vorher mindestens zwei der horizontalen oder vertikalen Nachbarn bereits belebt waren. Niemals verschwinden Zwerge. Ist es möglich, dass eine Anfangsaufstellung von Zwergen mit weniger als acht Zwergen irgendwann das gesamte Brett bevölkert?

[2] Kommunikation ist natürlich nur vorher erlaubt. Es geht nicht um Restwärme der Lampe oder ähnliches. Die zufällige Reihenfolge des Riesendirektors ist so, dass jede endliche Folge von Zwergen irgendwann einmal vorkommt.

[3] Zwerge leben übrigens für immer, werden niemals neu geboren, kommen auch niemals neu auf die Insel und sind sehr sehr schlau.

n) (*) Drei Mathematikerzwerge wollen einen Kuchen unter sich aufteilen. Sie haben ein Messer, aber keinerlei Messgeräte. Sie wolllen eine Methode finden, den Kuchen "gerecht" unter sich aufzuteilen. Hier bedeutet gerecht, dass jeder Zwerg eine Strategie hat, die ihm mindestens ein Drittel des Kuchens sichert, *egal* wie die anderen Zwerge handeln.[4] Findet ihr eine Strategie?

o) (*) 100 Zwerge machen einen Ausflug in eine Hutfabrik zur alljährlichen Konferenz über Hutfärbungsprobleme. Dort erhält jeder Zweg eine Karte mit einer jeweils verschiedenen reellen Zahl, welche dem jeweiligen Zwerg auf die Stirn geklebt werden, so dass jeder Zwerg nur die Zahlen der anderen sehen kann. Jeder Zwerg muss daraufhin einen weißen oder einen schwarzen Hut individuell wählen.[5] Danach werden die Zwerge entsprechend ihrer Zahlen aufsteigend angeordnet. Wenn die Hutfarben sich danach abwechseln (also zum Beispiel weiß–schwarz-weiß-schwarz-$\cdots$), dürfen die Zwerge zur Konferenz eintreten und gewinnen einen lebenslangen Vorrat an Hüten. Gibt es eine Strategie, mit welcher die Zwerge sicher gewinnen?

p) (*) Bei einer Zwergenparty sind fünf Pärchen, ihr seid einer dieser Zwerge. Am Anfang geben sich viele Zwerge die Hände. Ihr beobachtet, dass sich keines der Pärchen untereinander die Hände schüttelt, da diese sich ja bereits kennen. Zu einem Zeitpunkt später fragt ihr alle anwesenden Zwerge wie oft sie Hände geschüttelt haben. Nach kurzem Grübeln bekommt ihr neun verschiedene Antworten. Wie oft hat eure Partnerin/euer Partner Hände geschüttelt?

q) (*) 100 Zwerge spielen ein Spiel. Dabei würfelt jeder Zwerg gleichzeitig einen Sechserwürfel. Jeder Zwerg kann nur die Würfelergebnisse der anderen 99 Zwerge sehen. Danach schreibt jeder Zwerg eine Zahl von Eins bis Sechs auf einen Zettel. Natürlich dürfen die Zwerge nicht miteinander reden oder die Zahlen der anderen anschauen. Die Zwerge gewinnen, wenn *alle* Zwerge ihre eigene Nummer notiert haben. Findet ihr eine Strategie, die die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, maximiert?

r) Fünf Piratenzwerge (Kapitän, Offizier, Matrose, Koch und Blinder Passagier) wollen einen Goldschatz von 100 Münzen unter sich aufteilen. Dies geschieht wie folgt: Als erstes darf der Kapitän einen Vorschlag machen, wer wieviele Münzen erhält. Dann wird abgestimmt und bei Gleichstand oder mehr positiven Stimmen der Vorschlag angenommen. Falls nicht, bekommt der Kapitän nichts mehr, wird aus der Mannschaft geschmissen und der Offizier darf einen Vorschlag machen über den die verbliebenen Piratenzwerge nach den gleichen Regeln abstimmen. Dies geschieht in der Reihenfolge der Zwerge wie anfangs notiert bis ein Vorschlag angenommen wird.

   Wir nehmen an, dass die Zwerge wie folgt abstimmen. Jeder will möglichst viel Gold gewinnen und wenn es schon kein Gold gibt, wenigstens in der Mannschaft bleiben. Falls ein Zwerg zwei Möglichkeiten hat, gleich viel Gold zu bekommen und in der Mannschaft zu bleiben, wählt er so, dass möglichst viele andere Zwerge aus der Mannschaft rausfliegen. Außerdem nehmen wir an, dass die Zwerge super klug sind und immer optimal für sich entscheiden.

   Wieviel Gold bekommt der Kapitän?

[4] Ihr dürft also nicht annehmen, dass die anderen Zwerge rational oder optimal handeln oder ähnliches.

[5] Die Zwerge dürfen sich nicht unterhalten, während sie die Hüte aussuchen und können nicht sehen, welche Hutfarben die anderen wählen.